1. Variables aleatorias independientes

<u>Definición</u>: Sean $F_1(y_1)$ y $F_2(y_2)$ funciones de distribución de Y_1 y Y_2, respectivamente, y $F(y_1, y_2)$ la función de distribución conjunta de Y_1 y Y_2. Entonces, se dice que Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$F(y_1, y_2) = F_1(y_1)F_2(y_2)$$

para todo par de números reales (y_1, y_2). Si Y_1 y Y_2 no son independientes, se dice que son dependientes.

<u>Teorema</u>: Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$ y funciones de probabilidad marginal $p_1(y_1)$ y $p_2(y_2)$, respectivamente, entonces Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$p(y_1, y_2) = p_1(y_1)p_2(y_2)$$

para todo par de números reales (y_1, y_2).

Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y funciones de densidad marginal $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$, respectivamente, entonces Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$$

para todo par de números reales (y_1, y_2).

<u>Teorema</u>: Supongamos que Y_1 y Y_2 tienen densidad conjunta $f(y_1, y_2)$, la cual es positiva si y sólo si $a \leq y_1 \leq b$ y $c \leq y_2 \leq d$, para las constantes a, b, c y d; en otro caso, $f(y_1, y_2) = 0$. Entonces Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$f(y_1, y_2) = g(y_1)h(y_2)$$

donde $g(y_1)$ es una función no negativa de Y_1 y $h(y_2)$ es una función no negativa de Y_2.

<u>Ejemplo</u>. Para el ejercicio de los accidentes con niños, ¿serán independientes Y_1 y Y_2?

<u>Solución</u>.
Para que las variables sean independientes se debe cumplir que $p(y_1, y_2) = p_1(y_1)p_2(y_2)$ para cualquier (y_1, y_2) que se tome, por lo tanto $p(0, 0) = p_1(0)p_2(0)$. $p(0, 0) = 0{,}38$, mientras que $p_1(0)p_2(0) = 0{,}76 \times 0{,}55 = 0{,}42$. Luego como $p(0, 0) \neq p_1(0)p_2(0)$, entonces concluimos que Y_1 y Y_2 son dependientes.

<u>Ejemplo</u>. Para el ejercicio de los niveles de gasolina, ¿serán independientes Y_1 y Y_2?

<u>Solución</u>.
Para variables aleatorias continuas decimos que Y_1 y Y_2 son independientes si y solo si $f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$. Por lo calculado anteriormente $f_1(y_1)f_2(y_2) \neq f(y_1, y_2)$, por lo tanto diremos que Y_1 y Y_2 son dependientes.